n.8

disegnare idee immagini

Rivista semestrale
del Dipartimento
di Rappresentazione
e Rilievo

Università degli
studi di Roma
«La Sapienza»

Anno V, n. 8
L. 18.000

teoria/tecnica

Giuseppe M. Catalano

Un teorema per l'unificazione dei metodi della scienza della rappresentazione

Il problema della unificazione dei metodi di rappresentazione ha origine nelle lezioni di Gaspard Monge che si aprono con una lunga disquisizione sul modo di controllare la posizione di un punto nello spazio per mezzo di idonei riferimenti geometrici. Il matematico francese ritenne di dare a questo problema la soluzione a tutti nota e pretese di ricondurre a tale soluzione ogni altro problema della rappresentazione, ivi compresa la più antica e nobile arte della prospettiva. Non vi è dubbio, tuttavia, che questa avesse già, alla fine del XVIII secolo, il carattere di un metodo di rappresentazione autonomo, sicché servirsi delle proiezioni ortogonali per costruire un'immagine prospettica, come Monge voleva, non era meno assurdo di quanto sarebbe stato servirsi della prospettiva per costruire una proiezione ortogonale, esercizio tanto possibile quanto inutile. Gli anni che conducono dal secolo dei lumi alla rivoluzione industriale sono segnati da questa curiosa concorrenza tra i metodi di rappresentazione: prova ne sia la polemica che accompagnò, soprattutto sulle pagine francesi, l'apparizione in Inghilterra della assonometria ortogonale.

Oggi tutto ciò sembra assurdo, e tuttavia si perpetua l'equivoco di considerare prospettiva e assonometria parte di una geometria descrittiva *alla quale appartiene, in omaggio alla verità storica, il solo metodo delle proiezioni ortogonali nella particolare formulazione di Monge. Poco si è detto, infatti, in merito alla possibilità di superare questa retrograda concezione con considerazioni ineccepibili. Luigi Campedelli ha indicato la strada, a metà Novecento, ma non l'ha percorsa.*

Giuseppe Catalano riprende ora, con rigore scientifico, il tema della unificazione dei metodi di rappresentazione e ci propone un teorema che potrebbe diventare, ma lo dirà il tempo, la base di una moderna concezione dei fondamenti teorici del disegno tecnico. La sua esposizione è di necessità astratta, ma non per questo lontana dai problemi operativi e didattici della rappresentazione. «Disegnare» è perciò lieta di ospitare questo contributo, che dimostra che è ancora oggi possibile approfondire e affinare i fondamenti del disegno e che invita ingegneri ed architetti a raccogliere la nobile tradizione che hanno legittimamente ereditato.

Riccardo Migliari

Rappresentare scientificamente significa acquisire e trasmettere la conoscenza della forma di un ente reale o immaginario e delle regole che a questa sottendono.

Si tratta di instaurare una relazione biunivoca tra il modello che rappresenta l'ente e l'ente rappresentato dal modello, di guisa che dal modello si possa risalire alla conoscenza di qualsiasi proprietà formale dell'ente, così come dalla conoscenza formale dell'ente si è giunti alla costituzione del modello.

In termini proiettivi il teorema che dimostreremo può così enunciarsi: *per configurare un sistema di rappresentazione nello spazio è necessario e sufficiente fissare un piano e tre distinti centri di proiezione, esterni a tale piano e non appartenenti alla stessa retta. La retta appartenente a due delle tre proiezioni del generico punto appartiene sempre alla traccia* K *della retta comune ai due centri fissi relativi a tali proiezioni.*

Ovvero dualmente:

per configurare un sistema di rappresentazione nello spazio è necessario e sufficiente fissare un centro di proiezione e tre distinti piani, esterni a tale centro e non appartenenti alla stessa retta. Il punto appartenente a due delle tre tracce del generico piano appartiene sempre alla proiezione k *della retta comune ai due piani fissi relativi a tali tracce.*

Dimostriamo il teorema riferendoci al primo enunciato, sapendo che implicitamente si dimostra così, per dualità, anche il secondo.

Per individuare un qualsiasi punto P dello spazio rispetto ad un piano di riferimento π occorrono, è ben noto, tre variabili indipendenti[1]. Siano ora fissati rispetto a π due punti qualsiasi C_1 e C_2 distinti ed esterni a tale piano (fig. 1) e siano essi assunti come centri di proiezione[2].

Un punto P dello spazio è individuato generalmente quando se ne conoscano le proiezioni P_1 e P_2 rispettivamente ottenute su π da C_1 e C_2, poiché le proiettanti p_1 e p_2 per P_1 e P_2 s'intersecano necessariamente in P. Tuttavia gli infiniti punti della retta k_{12} appartenente ai due centri vengono proiettati da questi nella traccia K_{12}, propria o impropria, della k_{12} su π, definita *nucleo*, e dunque tali punti non sono individuabili, per la coincidenza delle proiettanti p_1 e p_2.

È necessario allora fissare un terzo centro di proiezione C_3, esterno alla k_{12}, in modo da ottenere una terza proiezione P_3 su π ed una terza proiettante p_3, che essendo comunque distinta dalla k_{12}, ne permetta sempre l'individuazione dei punti (fig. 2).

Dunque le proiezioni P_1, P_2 e P_3 su π sono necessarie per individuare la posizione di qualsiasi punto P dello spazio rispetto a π, ma esse sono anche sufficienti perché costituiscono per ciascun punto, da riferire a π, tre variabili indipendenti.

Inoltre, considerati due qualsiasi dei tre centri, ad esempio C_1, C_2, il piano C_1C_2P, dovendo appartenere sia alla retta k_{12}, avente per traccia il nucleo K_{12}, che alle proiettanti P in P_1 e P_2, interseca π secondo la retta $K_{12}P_1P_2$ e dunque, al variare di P, la retta (P_1P_2) descrive su π il fascio di centro K_{12}.

Come volevasi dimostrare.

È bene però rilevare come in presenza di due centri impropri, essendo la retta k, ad essi appartenente, pure impropria, possa essere omesso il terzo centro di proiezione C_3, e ciò accade come si esaminerà tra breve, ad esempio, nelle doppie proiezioni ortogonali e nelle proiezioni assonometriche.

Esaminiamo adesso come, in base al primo enunciato del teorema, sia già possibile unificare tutti i metodi di rappresentazione.

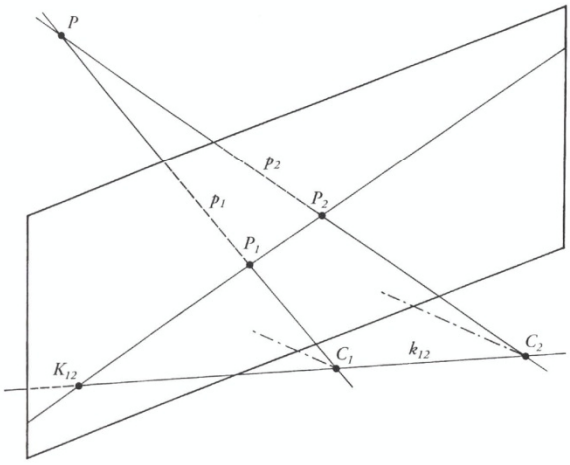
Individueremo in particolare in ciascun sistema gli elementi fissi, cioè il quadro ed i centri di proiezione, nonché le variabili indipendenti, proiezioni del generico punto P, necessari per la configurazione del sistema stesso.

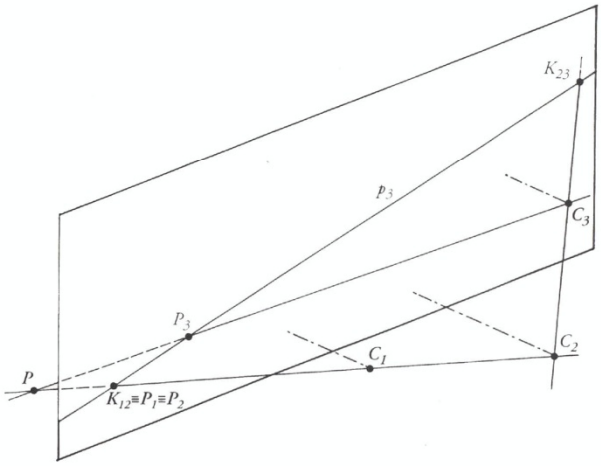
Consideriamo per primo, ad esempio, il sistema delle proiezioni assonometriche (figg. 3, 4). Il generico punto P è rappresentato mediante le due proiezioni P' e P'_{xy}, la prima ottenuta proiettando P in P' sul quadro π secondo il centro improprio C_1^{∞} relativo ad una determinata direzione ortogonale, o obliqua, rispetto a π; la seconda ricavata invece proiettando dapprima P sul piano xy in P_{xy} secondo il centro improprio C_2^{∞} relativo alla direzione ortogonale a π_2, quindi proiettando P_{xy} in P'_{xy} su π secondo C_1^{∞}.

Se dunque consideriamo come quadro fisso π e prolunghiamo su di esso le rette proiettanti P secondo C_1^{∞} e C_2^{∞}, si ottengono i punti P_1 e P_2 che costituiscono due delle tre proiezioni indipendenti del teorema. Il nucleo K_{12}^{∞} è

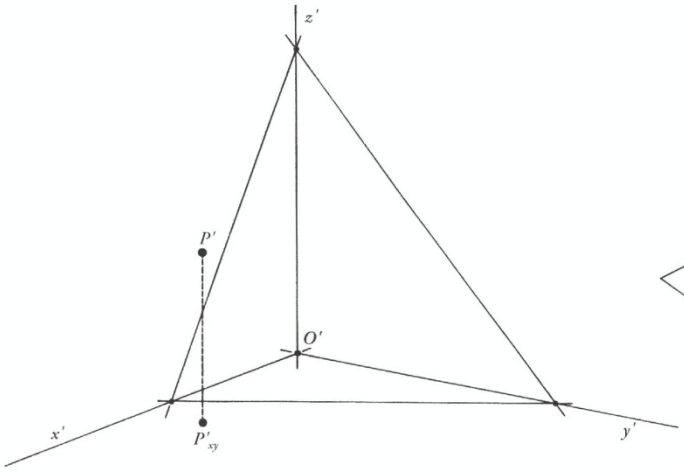
1/ Le proiettanti che escono da due centri C_1 e C_2 individuano tutti i punti dello spazio tranne quelli appartenenti alla retta (C_1C_2).
2/ Nel caso delle proiezioni assonometriche due centri C_1^∞ e C_2^∞ proiettano un punto generico P sul quadro e su uno dei piani coordinati.

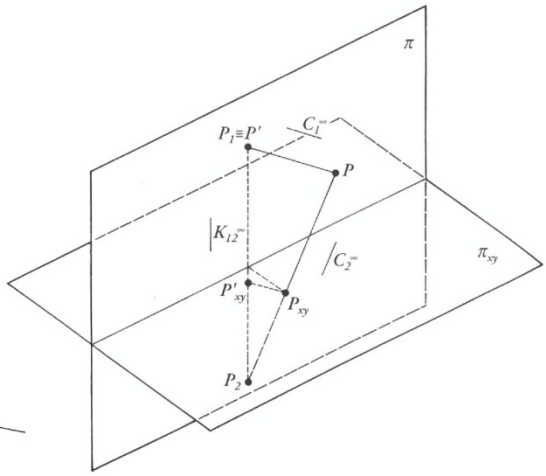
3/ Un terzo centro di proiezione C_3, consente di rimuovere l'eccezione osservata nella figura precedente.
4/ La proiezione di P sul piano coordinato (P_{xy}) viene poi proiettata sul quadro in P'_{xy}. Prolungando le rette che proiettano P dai due centri suddetti si ottengono, sul quadro i punti $P_1 \equiv P'$ e P_2, che sono due delle proiezioni contemplate nel teorema.





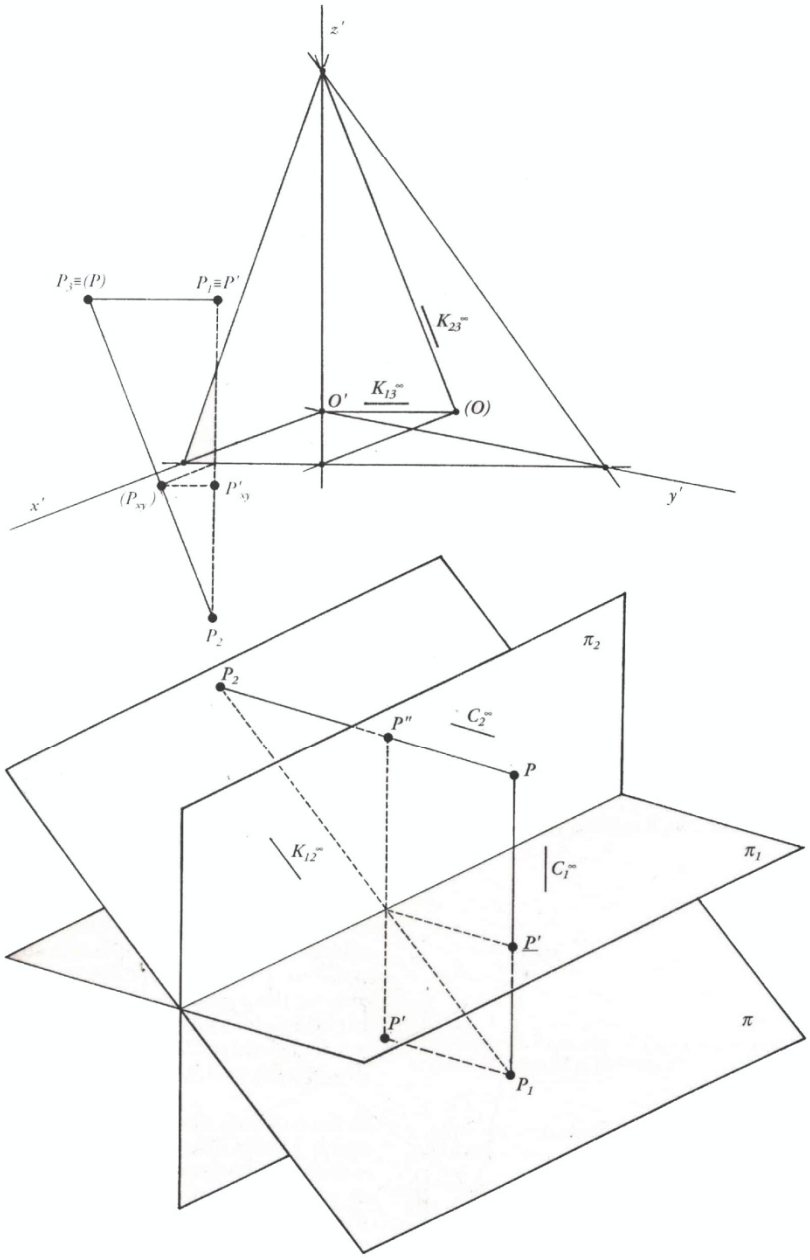
allora individuato nella direzione appartenente a P_1 e P_2, essendo rintracciabile nel punto improprio appartenente a π ed alla retta impropria (giacitura) per C_1^∞ e C_2^∞.
Nel sistema delle doppie proiezioni parallele il generico punto P è rappresentato mediante le due proiezioni P' e P'' la prima ottenuta proiettando dapprima P sul piano orizzontale π_1, in $\underline{P'}$, quindi proiettando $\underline{P'}$ in P' su π_2 secondo il centro improprio corrispondente al ribaltamento di π_1 su π_2; la seconda proiettando direttamente P su π_2 secondo C_2^∞ (figg. 6, 7).
In questo caso per ritrovare gli elementi fissi e le variabili del teorema occorre riferirsi al secondo piano bisettore della coppia π_1-π_2, piano che considereremo come quadro π del sistema. Allora prolungando su di esso le rette proiettanti P secondo C_1^∞ e C_2^∞, si ottengono, ancora una volta, le due proiezioni indipendenti P_1 e P_2 necessarie al sistema (P' e P'' possono infatti considerarsi dipendenti da P_1 e P_2).
Il nucleo K_{12}^∞ è ancora una volta improprio e resta individuato nella direzione appartenente a P_1 e P_2, essendo ritrovabile nel punto improprio appartenente a π ed alla retta impropria per C_1^∞ e C_2^∞.
Nel sistema delle proiezioni centrali il generico punto P è, infine, rappresentato mediante l'appartenenza ad una qualsiasi retta r (di trac-





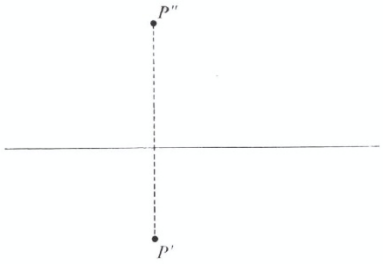
/ La terza proiezione di P (P_3) si ottiene, in questo caso, proiettando il punto secondo la direzione che porta P in P_3 nel ribaltamento del piano (PP_1P_2) sul quadro.

6/ 7/ Nel caso delle proiezioni ortogonali le proiezioni P_1 e P_2 contemplate dal teorema sono quelle di P sul secondo piano bisettore.



cia T_r e fuga F'_r), cioè mediante le proiezioni P_1, coincidente con P', e P_2 coincidente con T_r, la prima ottenuta proiettando P sul quadro π dal centro C_1 al finito, la seconda proiettando P sullo stesso quadro dal centro improprio C_2^∞ relativo alla direzione della r (figg. 9, 10). In C_1, C_2^∞, π si individuano allora immediatamente gli elementi fissi del sistema, così come in P_1 e P_2 ritroviamo le due variabili indipendenti.

Il nucleo K_{12}, questa volta al finito, si ritrova nella traccia dell'asse appartenente ai due centri e dunque nel punto di fuga F'_r della r. È bene ricordare come, in accordo al teorema, il generico punto Q di tale asse non è rappresentato se non si introduce un terzo centro, proprio o improprio, rifacendoci all'esempio una seconda direzione corrispondente al punto di fuga F'_s, distinto da F'_r e quindi una retta s per Q di traccia T_s essendo T_s coincidente allora con Q_3



proiezione di Q dal centro improprio C_3^∞.

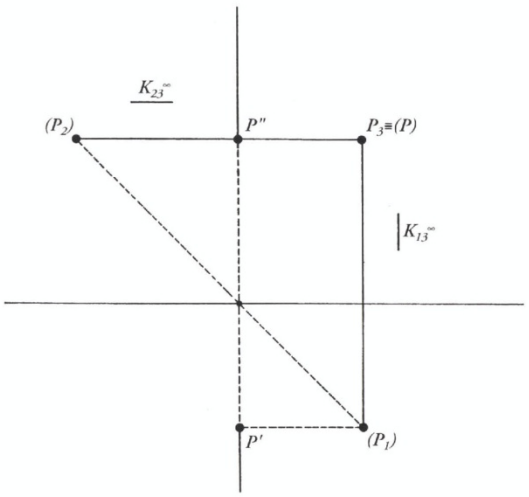
Soffermiamoci adesso sulla restituzione della posizione del generico punto P rispetto al quadro π. In particolare torniamo alle proiezioni assonometriche (figg. 3, 4) e operiamo il ribaltamento su π del piano per P' e P'_{xy} (ovvero per P_1 e P_2) ortogonale a π (fig. 5).

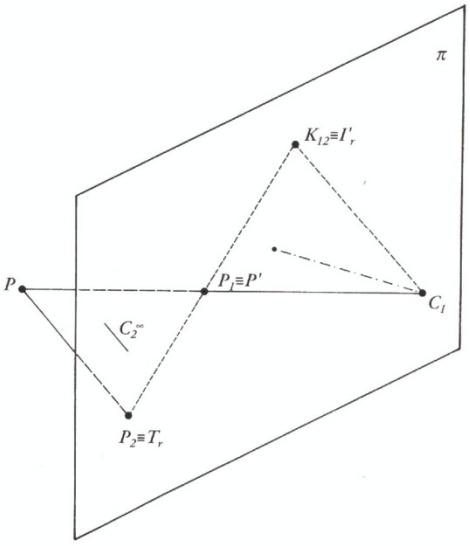
Tale operazione è equivalente in realtà, come è noto, ad una proiezione della configurazione da un centro improprio C_3^∞, disposto a 45° con π, tale da proiettare l'origine O del sistema di assi cartesiani x, y, z in (O). È interessante a tal punto notare come l'asse (z), ribaltato di z, fornisce la direzione del nucleo improprio K_{23}^∞, così come O'-(O) porge la direzione del nucleo improprio K_{13}^∞, sicché,

8/ Come già per l'assonometria, la terza proiezione di P (P_3) si ottiene, in questo caso, proiettando il punto secondo la direzione che porta P in P_3 nel ribaltamento del piano (PP_1P_2) sul quadro.

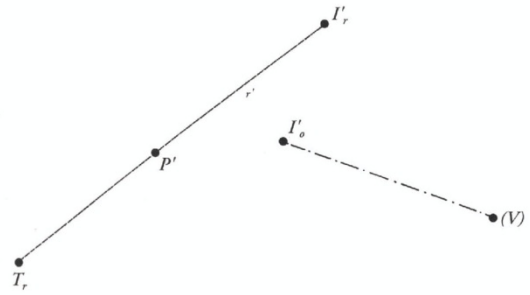
9/ 11/ In prospettiva il punto P è rappresentato mediante la proiezione P' dal centro C_1 e l'appartenenza ad una qualsiasi retta, condizione che equivale ad una seconda proiezione sul medesimo quadro da un secondo centro che è la direzione della retta.

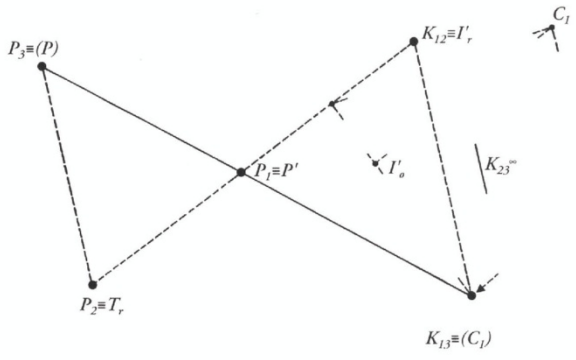
10/ La terza proiezione P_3 di P si ottiene, in questo caso, con l'equivalente ribaltamento del piano per C_1 e per la retta che si è assunta come seconda proiettante di P.





in base al teorema, le rette proiettanti P_1 e P_2 dai rispettivi nuclei devono necessariamente incidersi nel punto P_3 coincidente con (P), ribaltato di P, essendo questo appartenente sia alla retta $P_1K_{13}^{\infty}$ che alla retta $P_2K_{23}^{\infty}$.
Analoga operazione può ripetersi per le doppie proiezioni (figg. 6, 7), effettuando il ribaltamento su π del piano per P' e P'' ortogonale a π, in modo da portare P_1 e P_2 rispettivamente in (P_1) e (P_2), ritrovando immediatamente nella verticale per (P_1) e nella orizzontale per (P_2) (ovvero P'') le direzioni dei nuclei K_{13}^{∞} e K_{23}^{∞}, definiti dalle coppie di centri C_1^{∞}, C_3^{∞} e C_2^{∞}, C_3^{∞} (fig. 8). Le rette proiettanti (P_1) e (P_2) si incontrano allora, come si è già affermato, necessariamente in P_3 coincidente con (P) ribaltato di P.
Lo stesso procedimento ripetuto infine nelle proiezioni centrali (figg. 9, 10), ribaltando su π il piano proiettante per C_1 e C_2^{∞}, porge K_{13} coincidente con (C_1), ribaltato di C_1, e K_{23}^{∞} coincidente con la direzione appartenente a K_{12} e K_{13}, essendo K_{23}^{∞}, come si è detto, il punto improprio intersezione della retta impropria per C_2^{∞} e C_3^{∞} col quadro π (fig. 11).
Ancora una volta il teorema ci assicura che le rette proiettanti P_1 da K_{13} e P_2 da K_{23} non possono che incidersi in P_3, coincidente con (P) ribaltato di P.
Riferiamoci adesso al secondo enunciato riesaminando i tre principali sistemi di rappresentazione, in modo da individuare ancora gli elementi fissi, cioè il centro ed i due, o tre, piani.
Conviene sottolineare che, come prima in presenza di due soli centri C_1 e C_2 ed un piano, non potevano essere rappresentati i punti appartenenti alla retta comune a C_1 e C_2, così adesso in presenza di due piani π_1 e π_2 ed un centro, non è possibile rappresentare i piani





appartenenti alla retta comune a π_1 e π_2, poiché evidentemente le due tracce di essi in tal caso coincidono.
È bene però subito notare come la dualità imponga adesso di riferirsi al piano, anziché al punto, come ente di immediata rappresentazione. Infatti se prima avevamo del punto due, o tre, proiezioni, adesso abbiamo del piano due, o tre, sezioni, le tracce sui due, o tre, piani fissi.
Così, se prima la retta poteva individuarsi mediante due proiezioni, adesso essa può individuarsi mediante due tracce (su due dei tre piani fissi).
Infine, se prima occorrevano due punti per individuare una retta, adesso occorrono due rette per individuare un punto.
Torniamo dunque al sistema delle proiezioni assonometriche. È immediato riconoscere i tre piani fissi π_1, π_2, π_3 nei tre piani coordinati ed il centro fisso C_1^{∞} nel centro improprio obliquo od ortogonale al quadro.
Altrettanto immediato è nelle doppie proiezioni parallele individuare i piani fissi nei due piani di riferimento π_1, π_2 mutuamente ortogonali, mentre il centro improprio C_1^{∞}, va individuato nella direzione ortogonale al secondo piano bisettore della coppia π_1-π_2. Tale centro proietta le due tracce indipendenti α_1 e α_2 del generico piano α sul quadro π della rappresentazione, che può assumersi coincidente con π_1 o π_2.
Nel sistema delle proiezioni centrali si ritrovano infine due piani fissi nel quadro π e nel piano all'infinito, mentre il centro C_1 è quello proprio del sistema.
Qualsiasi piano α ha dunque una traccia sul quadro π_1 e l'altra all'infinito su π_2^{∞}, proiettata da C_1 sul quadro della rappresentazione nella retta di fuga i'_{α}. Fanno eccezione i piani paralleli al quadro, i quali appartenendo alla retta impropria del quadro (intersezione di π_1 e π_2^{∞}) richiedono la presenza di un terzo piano fisso π_3, ad esempio il geometrale.
Soffermiamoci infine sulla seconda parte del secondo enunciato. In essa si afferma, ripetiamola, che *il punto appartenente a due delle tre tracce del generico piano appartiene sempre alla proiezione* k *della retta comune ai due piani fissi relativi a tali tracce.*

Se dunque, ad esempio, in proiezione assonometrica, α_{xy} ed α_{xz} sono le tracce del generico piano α coi piani coordinati *(xy)* ed *(xz)*, assumendo il quadro π come terzo piano fisso del sistema, può affermarsi, come è noto, che la traccia α_{π} di α su π deve necessariamente appartenere sia al punto comune ad α_{xy} ed alla traccia del piano *(xy)* su π, che al punto comune ad α_{xz} ed alla traccia del piano *(xz)* su π.
Naturalmente tutto ciò può ripetersi in qualsiasi sistema di rappresentazione per ricavare la traccia del generico piano rispetto ad un qualsiasi piano fissato rispetto ai due piani fissi di riferimento, così come si è illustrato, dualmente, per la seconda parte del primo enunciato.
Da quanto esposto risulta chiaro come i due enunciati duali del teorema siano in realtà fusi nella metodologia dei sistemi di rappresentazione, in cui si ricorre ad almeno due piani di riferimento e due centri.
È possibile così rappresentare immediatamente il punto e la retta mediante due proiezioni, ma anche la retta ed il piano mediante due tracce.
Il teorema permette dunque di unificare, malgrado le distinte genesi nel tempo e nello spazio, tutti i metodi della scienza della rappresentazione.

Giuseppe M. Catalano – Svolge attività di ricerca presso l'Università di Palermo

1. Ad esempio le tre coordinate polari di P rispetto al piano polare π.

2. Nelle rappresentazioni in proiezione parallela di fig. 1 e fig. 2 sono indicate in tratto-punto le proiettanti i tre centri C_1, C_2, C_3 ortogonalmente a π e nelle tracce di queste su π le relative proiezioni di essi.

Le théorème de la science de la représentation et l'unification de ses méthodes

Représenter signifie instaurer un rapport biunivoque entre le modèle qui représente l'entité et l'entité représentée par le modèle, de façon à pouvoir remonter du modèle à la connaissance de toute propriété formelle de l'entité en question, de même que la connaissance formelle de l'entité a permis d'aboutir à la constitution du modèle.

En termes de projection, le théorème de la science de la représentation, que nous allons démontrer, peut être énoncé comme suit: pour réaliser un système de représentation dans l'espace, il est nécessaire et suffisant d'établir un plan et trois centres de projection distincts, extérieurs à ce plan et n'appartenant pas à la même droite. La droite appartenant à deux des trois projections du point générique appartient toujours à la trace K de la droite commune aux deux centres fixes relatifs à ces projections.

Ou bien, selon le principe de la dualité: pour réaliser un système de représentation dans l'espace, il est nécessaire et suffisant d'établir un centre de projection et trois plans distincts, extérieurs à ce centre et n'appartenant pas à la même droite. Le point appartenant à deux des trois traces du plan générique appartient toujours à la projection k de la droite commune aux deux plans fixes relatifs à ces traces.

Démontrons le théorème sur la base du premier énoncé, en sachant que l'on démontre aussi implicitement, en raison de la dualité, le deuxième.

Pour repérer un point quelconque P de l'espace par rapport à un plan de référence π il faut, comme on sait, trois variables indépendantes. Fixons maintenant par rapport à π deux points quelconques C_1 et C_2 distincts et extérieurs à ce plan (fig. 1) et prenons-les comme centres de projection.

Un point P de l'espace est en général repéré lorsqu'on connaît ses projections P_1 et P_2 obtenues sur π respectivement à partir de C_1 et C_2, puisque les projetantes p_1 et p_2 pour P_1 et P_2 ne peuvent se couper qu'en P. Toutefois les points infinis de la droite k_{12} qui appartient aux deux centres sont projetés par ces derniers dans la trace K_{12}, propre ou à l'infini, de la droite k_{12} sur π, qualifié de noyau: ces points ne sont donc pas repérables à cause de la coïncidence des projetantes p_1 et p_2.

Aussi faut-il fixer un troisième centre de projection C_3, extérieur à k_{12}, de façon à obtenir une troisième projection P_3 sur π et une troisième projetante p_3 qui, distincte de k_{12}, permette toujours de répérer ses points (fig. 2).

Les projections P_1, P_2 et P_3 sur π sont donc nécessaires pour repérer la position d'un point P quelconque de l'espace par rapport à π, mais elles sont aussi suffisantes car elles représentent pour chaque point, devant être rapporté à π, trois variables indépendantes.

De plus, si l'on considère deux centres quelconques parmi les trois, par exemple C_1 et C_2, le plan C_1C_2P qui doit appartenir tant à la droite k_{12}, ayant pour trace le noyau K_{12}, qu'aux projetantes de P en P_1 et P_2, coupe π le long de la droite $K_{12}P_1P_2$: par conséquent, lorsque P varie, la droite (P_1P_2) décrit sur π le faisceau de droites ayant pour centre K_{12}.

Ce qu'il fallait démonter.

Il y a lieu cependant de relever qu'en présence de deux centres à l'infini, étant donné que la droite k, qui leur appartient, est elle aussi à l'infini, on peut se passer du troisième centre de projection C_3.

Comme l'illustre cet article, on peut, sur la base du premier énoncé du théorème, unifier toutes les méthodes de représentation, en identifiant notamment dans chaque système les éléments fixes, à savoir le tableau et les centres de projection, ainsi que les variables indépendantes, projections du point générique P, nécessaires pour la configuration du système en question.

Les deux énoncés duals du théorème sont en fait fusionnés dans la méthodologie des systèmes de représentation qui prévoit au moins deux plans de référence et deux centres.

The theorem of representation and the unification of its methods

Representation means the creation of a bi-univocal relationship between the model depicting the entity and the entity represented by the model, so that from the model it is possible to go back to the knowledge of any formal property of the entity, in the same way that the formal knowledge of the entity made it possible to arrive at the constitution of the model.

In projective terms, the theorem of representation, demonstrated here, can be stated as follows: to depict a system of representation in space it is necessary and sufficient to fix a plane and three distinct non-colinear centres of projection outside the plane. The line between two of the three projections of any point belongs to the trace K of the line common to the two fixed centres relative to the projections considered.

In other words: to depict a system of representation in space it is necessary and sufficient to fix a projection centre and three distinct planes, external to the centre and not belonging to the same line. The point belonging to two of the three traces of the given point still belongs to the projection k of the line common to the two fixed planes containing the said traces.

The theorem is demonstrated by referring to the first statement, knowing that by duality the second statement is also demonstrated.

To identify any point P in space with respect to a reference plane π, three independent variables are required. Let any two distinct points C_1 and C_2 external to the plane (fig. 1) be fixed with respect to π and given as centres of projection.

A point P in space is generally identified when the projections P_1 and P_2, obtained on π by C_1 and C_2 respectively, are known, since the projectors p_1 and p_2 for P_1 and P_2 necessarily intersect in P. However, the infinite points of the line k_{12} belonging to the two centres are projected by the centres on the proper or ideal trace K_{12}, of k_{12} on π, defined as the kernel, and therefore these points are not identifiable since the projectors p_1 and p_2 coincide.

It is therefore necessary to fix a third projection point C_3, external to k_{12}, to obtain a third projection P_3 on π and a third projector p_3 which, being in any case distinct from k_3, does not always enable identification of the points (fig. 2).

The projections P_1, P_2, P_3 on π are necessary to identify the position of any point P in space with respect to π and, being three independent variables for each point, to be referred to π, they are also sufficient.

Moreover, taking any two of the three centres, for instance C_1, C_2, the plane C_1C_2P, which must belong both to the line K_{12} having the kernel K_{12} as its trace, and to the projectors P in P_1 and P_2 – intersects π with the line $K_{12}P_1P_2$, so, when P varies, the line (P_1P_2) describes the centre sheaf K_{12} on π.

However, with two ideal centres, since the line k which belongs to these ideal centres is also ideal, the third projection centre C_3 can be omitted.

As illustrated in the article, based on the first statement of the theorem, all the methods of representation can be unified, identifying in particular the fixed elements of each system, i.e., the projection plane and the projection centres, as well as the independent variables, projections of any point P, necessary for the configuration of the system.

The dual statements of the theorem merge in the system of representation in which at least two reference planes and two centres are used.